

文章编号: 1000-7598-(2008) 06-1446-05

塑性梯度体元及应变局部化启动机制分析

赵 冰¹⁻³, 李 宁³, 郑颖人¹

(1. 解放军后勤工程学院 建筑工程系, 重庆 400041; 2. 长沙理工大学 桥梁与结构工程学院, 长沙 410076;

3. 西安理工大学 岩土工程研究所, 西安 710048)

摘 要: 利用代表性体元可较好地反映出并非理想连续均匀的岩土介质破坏前强度和变形行为。但当材料出现高的应变梯度(应变局部化)时, 在体元上的应力、应变呈现高次非线性变化, 代表性体元不能如实地反映出介质的力学性能。提出一种可包含局部化变形的研究单元——塑性梯度体元(Plasticity Gradient Volume Element), 塑性应变在其内可用微分形式表达。该体元不但可反映介质的平均力学响应, 而且可反映应变呈高次非线性变化时的影响。随着硬(软)化模量从正值变为负值, 变形模式将由均匀变形模式变为局部化变形模式, 这就是应变局部化的启动机制。

关 键 词: 应变梯度; 代表性体元; 塑性梯度体元; 应变局部化; 启动机制

中图分类号: O 344

文献标识码: A

Study of plasticity gradient volume element and start-up mechanism of strain localization

ZHAO Bing¹⁻³, LI Ning³, ZHENG Ying-ren¹

(1. Department of Architectural Engineering, Logistic Engineering University of PLA, Chongqing 400041, China;

2. School of Bridge and Structure Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China;

3. Institute of Geotechnical Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China)

Abstract: The behaviors of geomaterials before destroy can be reflected by the representative volume element; but when the high strain gradient occurs (such as the strain localization occurs), the representative volume element in which the strain and stress are nonlinear, cannot reflect the mechanical character of geomaterials entirely. A plasticity gradient volume element (PGVE) which can describe the local deformation is proposed. The start-up mechanism of strain localization is analyzed; when the hardening modulus (or softening modulus) changes from positive to negative, the deformation pattern will change from uniform pattern to localization pattern.

Key words: strain gradient; representative volume element; plasticity gradient volume element; strain localization; start-up mechanism

1 引 言

土体是富含颗粒的多相材料, 岩体中充满了节理和裂隙, 它们都不是连续均匀的。将连续介质力学应用于岩土介质时, 常用的方法是取一个“相当小而非无穷小体积”的材料单元, 一方面令其足够大(微观无穷大), 以包含足够多的微结构信息而使其具有代表性; 另一方面该体积相对于宏观体又足够小(宏观无穷小)。这就是 Hashin^[1]给出

的代表性体元(Representative Volume Element)。其他学者也对代表性体元(RVE)给出了其他一些类似的定义^[2,3]。无论是哪种定义, 在代表性体元(RVE)中, 应力和应变等分量代表的实际上只是相当小而非无穷小体积上的统计平均值。代表性体元(RVE)是一个能够反映材料宏观本构响应的最小材料单元。自从代表性体元提出后, 人们在处理复合材料、裂隙岩体、颗粒介质时可以较好地反映出材料在破坏前的强度和变形行为。

收稿日期: 2006-09-11

基金项目: 湖南省教育厅优秀青年项目 (No. 07B004); 湖南省自然科学基金资助项目 (No. 04JJ40032)。

作者简介: 赵冰, 男, 1972 年生, 后勤工程学院在站博士后, 副教授, 主要从事岩土力学与工程方面的研究。E-mail: @zhaob_m-y@163.com

应变局部化作为岩土介质的一种常见的破坏形式, 其研究是国内外近年岩土工程和岩土力学领域的研究热点之一^[4-7]。应变局部化一旦发生, 原来的均匀变形模式被一种局限在一个很狭窄的带状区域内的急剧不连续的位移梯度所代替^[8]。此时, 利用代表性体元处理材料的应力-应变关系会遇到一些矛盾和困难: 在应变梯度不大的情况下, 用统计平均值替代连续介质力学的理论解可以较为恰当地描述介质的力学反应。但材料出现高的应变梯度时, 在相当小体积上其应力和应变呈现高次非线性变化, 经典理论所代表的统计平均值就不能如实地反映出材料在相当小体积上的强度和变形行为。当应变局部化发生时, 应变局部化带内将出现高的应变梯度。

本文在对岩土试样的宏观试验结果和 CT 试验结果分析的基础上, 结合代表性体元的特点, 提出一种可包含局部化变形的研究基元——塑性梯度体元(Plasticity Gradient Volume Element), 该体元不但可反映介质平均的力学响应, 而且可反映应变呈高次非线性变化时的影响; 塑性应变在塑性梯度体元(PGVE)内可用微分形式表达。随着硬(软)化模量从正值变为负值, 变形模式将由均匀变形模式变为局部化变形模式, 这就是应变局部化的启动机制。

2 试验分析结果

岩土体在均匀变形模式时, 如图 1(b)所示, 塑性应变在被分析域内的各处均基本相同。基于微元体经典塑性理论认为, 在代表性体元内, 塑性应变是均匀分布的, 可将塑性表示为关于硬化模量的显式表达式, 而与坐标无关。但是, 当岩土体进入了局部化变形模式后, 如图 1(c)所示, 塑性应变在被分析域内的各处是不相同的, 而是主要集中在剪切带内。

显然, 在图 1(a)所示的载荷和边界的情形下, 用经典塑性理论难以得到图 1(c) 所示的局部变形结果。仅仅用关于硬化模量的显式表达式来描述塑性应变是不合理的。由此, 可以得到以下分析结果:

(1) 塑性剪切应变不仅与硬化模量有关, 而且与坐标有关。

国内外不少学者致力于 CT 技术在岩土力学的应用研究。杨更社、谢定义等^[10]利用 CT 技术, 通过 CT 数的大小及变化定量地研究了岩石的损伤特性, 指出如何将 CT 数和岩石材料损伤变量及损伤扩展定量联系起来是很有价值的研究课题。吴紫

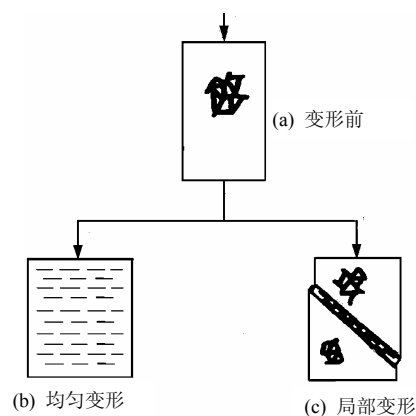


图 1 岩土体的变形模式^[9]

Fig.1 deformation pattern of geo-material

汪、蒲毅彬等人^[11]利用 CT 技术对冻土过程蠕变的体积变化进行了分析, 得出了“试验土样的软化破坏均首先发生在低密度处”的结论。Besuelle、Desrues 和 Raynaud^[12]研究 Vosges 砂岩的局部化变形时, 利用 CT 技术分析了剪切带内的体积应变, 发现: 在较低的围压 (30 MPa) 下产生膨胀的剪切带(图 2 中的暗色区), 在较高的围压 (50 MPa) 下产生压缩的压实带(图 3 的亮色区)。图 4 为葛修润等人^[13]给出的岩样在剪切过程中不同时刻的 CT 图像。他们的结果都证实了在剪切带内体积变化更为剧烈(或者说塑性体积变形将主要集中在剪切带内)的结论。

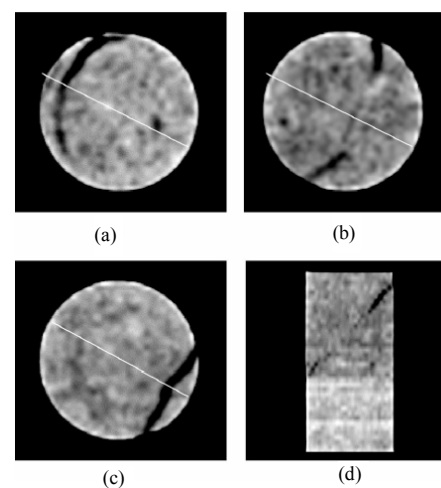


图 2 Vosges 砂岩压缩实验的应变局部化 (围压为 30 MPa)^[12]

Fig.2 Localization pattern of Vosges sandstone in compression at a confining pressure of 30 MPa

(2) 当岩土体进入了局部化变形模式后, 体积应变增量也将在一个很狭窄的带状区域内聚集。

(3) 塑性体积应变也同坐标相关。

基于上述分析可知: 代表性体元内忽略塑性应变的假设或塑性应变均匀分布的假设是导致经典

塑性理论难以描述应变局部化的原因。

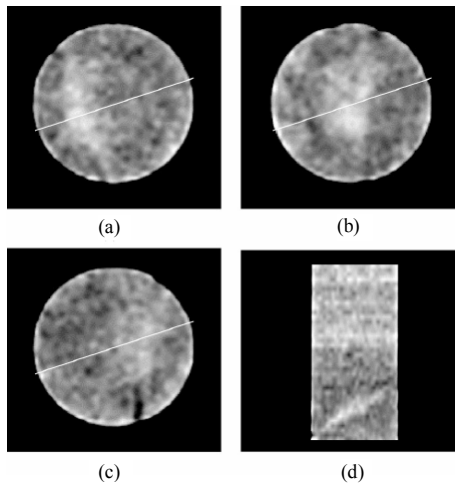


图3 Vosges 砂岩压缩试验的局部化变形
(围压为 50 MPa)^[12]

Fig.3 Localization pattern of Vosges sandstone in
compression at a confining pressure of 50 Mpa

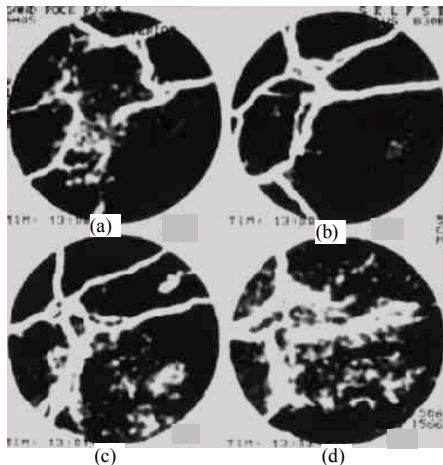


图4 岩样在剪切过程中不同时刻的 CT 图像^[13]
Fig.4 The CT image of rock sample

3 塑性梯度体元

为了利用体元(Volume Element)的概念描述应变局部化现象。本文提出一种可包含细观构造引起的局部化变形的研究基元——塑性梯度体元,定义如下:在试样内任意选取一个“相当小而非无穷小”的体积。该体积相对于整个试样无穷小;相对于一个几何点又足够大,使其能包含足够多的微结构信息,可以反映塑性应变的非线性变化。它是可保证足够精度的最小限度的细观结构单元。

塑性梯度体元与通常提到的代表性体元的相同点在于:它们都选取的是一个“相当小而非无穷小”或“宏观无穷小,微观无限大”的体积,其

大小为材料颗粒或裂隙大小的数倍,认为弹性应变是均匀分布的;不同点在于:在代表性体积中,通常忽略了塑性应变,或者认为塑性应变也是均匀分布,但在塑性梯度体元中,塑性应变不再是均匀分布的,而是允许其呈非线性变化。在不出现局部化变形的情形下,塑性梯度体元将退化为代表性体元,是一种特殊的 RVE。

为了说明问题的方便,仅给出一个在局部化带附近的最具特点的塑性梯度体元,在其他位置的塑性梯度体元只是上述情形的退化。依据塑性梯度体元的定义,可将该塑性梯度体元示意描述为图 5。

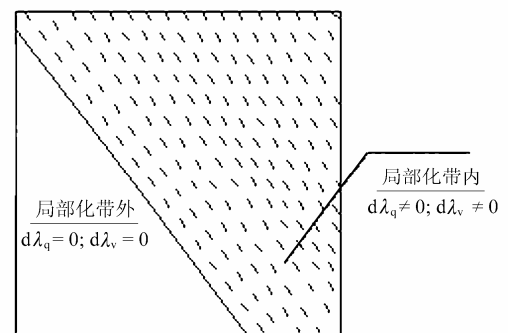


图5 塑性梯度体元中塑性增量的分布示意图
Fig.5 Plastic strain increment in plasticity
gradient volume element

对塑性梯度体元作如下假定:

(1) 塑性梯度体元的总应变由弹性应变和塑性应变两部分组成,应变局部化发生后,塑性应变增量仅在局部化带内聚集。

(2) 由于要求所取的塑性梯度体元相对于整个试样足够小,因而可以认为,弹性应变在塑性梯度体元内是均匀分布的;

(3) 为了便于描述应变局部化发生后塑性梯度体元的局部化特征,在塑性梯度体元内塑性应变可以是非均匀分布的。

基于上述假定,可作如下推论:

(1) 由于弹性应变在塑性梯度体元内均匀分布,塑性梯度体元的弹性应变可以直接由广义虎克定律确定。

(2) 由于该体元相对于整个试样无穷小,保证了弹性应变的连续。

(3) 由于进入局部化变形模式后,塑性应变增量只在局部化带内增长,这最终将导致局部化带中心线的塑性应变为最大,到局部化带的边界逐渐降为 0。这样就使得局部化带边界上塑性应变连续。

(4) 塑性梯度体元内塑性应变的分布规律为

$$\varepsilon^p = \varepsilon^p(x, y, h) \quad (1)$$

式中: ε^p 为塑性应变; x, y 为坐标; h 为硬(软)化模量。

4 应变局部化的启动机制

这里研究的主要问题: 一是塑性应变分布规律的具体形式; 二是它如何导致应变局部化的启动机制。现以一维情况为例, 说明如下。

在经典塑性力学中, 塑性屈服函数可表示为

$$\bar{\sigma} = \sigma_i + h\varepsilon^p \quad (2)$$

式中: $\bar{\sigma}$ 为当前屈服应力; σ_i 为初始屈服应力;

$h = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p}$ 。显然, 塑性应变此时是一个显式表达式。

借鉴 R. de Borst 和 H. B. Mühlhaus^[4]的处理方法, 考虑屈服函数的梯度依赖, 式(2)可改写为

$$\bar{\sigma} = \sigma_i + h\varepsilon^p - C \frac{d^2 \varepsilon^p}{dx^2} \quad (3)$$

式中: C 为与局部化特征相关的物理量, 可以将 $-C \frac{d^2 \varepsilon^p}{dx^2}$ 理解为应变梯度修正项, 这意味着在屈服函数中考虑了应变梯度的影响。这样, 就得到了一个以硬化模量为参数的关于坐标的微分方程, 这就是式(1)的一种具体形式。注意到对体元内各点, 这个微分方程的形式是统一的。

由微分方程可知, 式(3)所表示的二阶微分方程的特征方程为

$$-Cr^2 + h = 0 \quad (4)$$

当 h 为正数(应变硬化)时, 式(4)表示的特征方程有两个不相等的实根: $r = \pm \sqrt{\frac{h}{C}}$ 。

微分方程对应的齐次方程的通解为

$$\varepsilon^p = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad (5)$$

式中: C_1, C_2 均为积分常数。当取得适当的积分常数时, ε^p 在空间各处将基本相同, 对应于图 1(b)。

当 h 为负数(应变软化)时, 微分方程的特征方程有一对共轭复根: $r = \pm \sqrt{h/C} i$, 微分方程对应的齐次方程的通解为

$$\varepsilon^p = A \cos(x/l) + h^{-1}(\bar{\sigma} - \sigma_i) \quad (6)$$

式中: A 为积分常数; $l = \sqrt{-\frac{C}{h}}$, 具有长度的量纲。

此时, 塑性应变成为了一个关于空间的周期解, 对应于图 1(c), 周期解的峰值区域形成局部化带。局部化带内的塑性应变将不同于局部化带外的塑性应变, 由此可以反映出岩土介质的应变局部化特征, 模型的局部化机制开始启动。

上述分析表明, 在屈服函数中考虑塑性应变的梯度, 建立塑性应变的微分表达式后, 随着硬(软)化模量从正值变为负值, 变形模式将由均匀变形模式变为局部化变形模式。

5 结 论

(1) 代表性体元内塑性应变是均匀分布的假设是导致经典塑性理论难以描述应变局部化的原因。

(2) 为了利用体元(Volume Element)的概念描述应变局部化现象。本文提出了塑性梯度体元(PGVE)的概念, 在塑性梯度体元中, 塑性应变的分布规律是: $\varepsilon^p = \varepsilon^p(x, y, h)$ 。这是一个与坐标相关的表达式。

(3) 可将塑性应变表达为一个以硬化模量为参数的关于坐标的微分方程。

(4) 应变局部化的启动机制为: 随着硬(软)化模量从正值变为负值, 微分方程的定性性质发生改变, 变形模式将由均匀变形模式变为局部化变形模式。

参 考 文 献

- [1] STROEVEN M, ASKES H, SLUYS L J. Numerical determination of representative volumes for granular materials[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193: 3221—3238.
- [2] DRUGAN W J, WILLIS J R. A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1996, 44: 497—524.
- [3] REN Z Y, ZHENG Q S. A quantitative study of minimum sizes of representative volume elements of cubic polycrystals—numerical experiments[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, 50: 881—893.
- [4] DE BORST R, MÜHLHAUS H B. Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1992, 35: 521—539.
- [5] 潘一山, 徐秉业, 王明洋. 岩石塑性应变梯度与 II 类岩石变形行为研究[J]. *岩土工程学报*, 1999, 21(4): 471—

- 474.
- PAN Yi-shan, XU Bing-ye, WANG Ming-yang. The study of plastic strain gradient and class II behavior for rock[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1999, 21(4): 471—474.
- [6] 张洪武, 秦建敏, 刘国震. 基于梯度塑性模型的多孔介质应变局部化分析的基本理论[J]. 岩土力学, 2006, 27(1):1—6.
- ZHANG Hong-wu, QIN Jian-min, LIU Guo-zhen. Basic theories for strain localization analysis of porous media with gradient dependent plasticity model[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(1):1—6.
- [7] 赵冰, 李宁, 盛国刚. 软化岩土介质的应变局部化研究进展——意义·现状·应变梯度[J]. 岩土力学, 2005, 26(3):111—118.
- ZHAO Bing, LI Ning, SHENG Guo-gang. Recent development of strain localization of softening geomaterials[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2005, 26(3):111—118.
- [8] 赵锡宏, 张启辉. 土的剪切带和数值分析[M]. 北京:机械工业出版社, 2003.
- [9] 沈珠江. 理论土力学[M]. 北京:中国水利水电出版社, 2000.
- [10] 杨更社, 谢定义, 张长庆, 等. 岩石单轴受力 CT 识别损伤本构关系的探讨[J]. 岩土力学, 1997, 18(2):29—34.
- YANG Geng-she, XIE Ding-yi, ZHANG Chang-qing, et al. The discussion about damage constitutive relation of rock under uniaxial stress identified by CT[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1997, 18(2): 29—34.
- [11] 吴紫汪, 马巍, 蒲毅彬, 等. 冻土蠕变变形特征的细观分析[J]. 岩土工程学报, 1997, 19(3): 1—6.
- WU Zi-wang, MA Wei, PU Yi-bin, et al. Submicroscopic analysis of deformation characteristics in creep process of frozen soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 1997, 19(3): 1—6.
- [12] BESUELLE P, DESRUES J, RAYNAUD S. Experimental characterization of the localization phenomenon inside a Vosges sandstone in a triaxial cell[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2000, 37: 1 223—1 237.
- [13] 葛修润, 任建喜, 蒲毅彬, 等. 岩石细观损伤扩展规律的 CT 实时试验[J]. 中国科学(E 辑), 2000, 30 (2):104—111.
- GE Xiu-run, REN Jian-xi, PU Yi-bin, et al. Real time CT test of the rock meso-damage propagation law[J]. **Science in China(Series E)**, 2000, 30 (2): 104—111.

上接第 1445 页

- [J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(2): 414—422.
- YANG Jun-jie, WANG Liang, ZHENG Jian-guo, et al. Study on stability of borrowed soil in ecological slope[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(2): 414—422.
- [6] 周欣华, 党进谦, 李靖. 黄土边坡及其稳定分析图简介[J]. 西北农业大学学报, 1999, 27(2): 101—104.
- ZHOU Xin-hua, DANG Jin-qian, LI Jing. Loess landslide slope and introduction of stability figure[J]. **Journal of Northwest Sci-tech. University of Agriculture and Forestry**, 1999, 27(2): 101—104.
- [7] 蒋刚, 林鲁生, 刘祖德. 降雨渗流作用下残积土边坡的数值分析[J]. 南京工业大学学报, 2005, 27(5): 27—31.
- JIANG Gang, LIN Lu-sheng, LIU Zu-de. Numerical analysis on residual soil slope under rainfall infiltration[J]. **Journal of Nanjing University of Technology**, 2005, 27(5): 27—31.
- [8] 高小育, 廖红建, 丁春华. 渗流对土质边坡稳定性的影响[J]. 岩土力学, 2004, 25(1): 69—72.
- GAO Xiao-yu, LIAO Hong-jian, DING Chun-hua. Seepage effects on soil slope stability [J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(1): 69—72.
- [9] 中华人民共和国交通部.JTJ 004-89 公路工程抗震设计规范[S]. 北京:人民交通出版社, 2003.
- [10] 中国水利水电科学研究院.DL 5073-2000 水工建筑物抗震设计规范[S]. 北京:中国电力出版社, 2000.
- [11] 中华人民共和国水利部.GB/T 50123-1999 土工试验方法标准[S]. 北京:中国计划出版社, 1999.